

Geometri Bintang Berotasi pada Keadaan Kritis

Iwan Setiawan* dan Muhammad Farchani Rosyid
*Kelompok Riset Kosmologi, Astrofisika,
 dan Fisika Matematika, Jurusan Fisika FMIPA UGM
 Jl. Babasari, Yogyakarta*

Intisari

Konfigurasi kesetimbangan mekanis pada bintang-bintang berotasi ditelaah melalui model Roche. Pada kajian ini bintang diperlakukan sebagai benda tegar, sedangkan geometrinya ditentukan berdasarkan persamaan ekipotensial. Keadaan kritis suatu bintang ditentukan berdasarkan ketiadaan gaya gravitasi total yang mengimbangi tekanan termodinamis. Dalam hal ini terdapat dua kemungkinan, percepatan gravitasi efektifnya lenyap atau batas Edington-nya terlampaui. Telah ditentukan penampang membujur bintang-bintang berotasi dari berbagai massa dan kecepatan sudut.

KATA KUNCI: rotasi bintang, keadaan kritis, kecepatan kritis, luminositas

I. PENDAHULUAN

Bintang mengalami rotasi seperti juga Bumi. Diketahui bahwa akibat rotasi, jejari katulistiwa Bumi 21,4 km lebih panjang dibanding jejari kutubnya [1]. Bintang yang memiliki rotasi tinggi, jejari katulistiwa bahkan dapat mencapai 1,5 jejari polar [2]. Ini menunjukkan bahwa rotasi cukup berpengaruh pada bintang. Mekanisme kesetimbangan pada bintang yang berotasi sudah dipelajari sejak lama, beberapa model telah dikembangkan. Contohnya adalah model McLaurin, yang menganggap kerapatan bintang yang tetap dan model Roche, yang beranggapan sebaliknya (kerapatan yang tidak tetap). Terdapat perbedaan yang cukup mencolok antara kedua model ini. Dalam model McLaurin, konfigurasi kesetimbangan tampak memipih untuk rotasi yang tinggi. Pada rotasi yang sangat tinggi model ini akan seperti piringan tipis yang tak hingga. Nilai maksimum kecepatan sudut pada model ini (dianggap rotasi benda tegar) adalah $\Omega_{max}^2 = 0,4494G\rho$ [1], kenyataannya akan terjadi ketidakstabilan sebelum mencapai batas kecepatan angular ini. Pada model Roche dengan Ω seragam (bintang dianggap sebagai rotasi benda tegar), gambaran kesetimbangan juga akan tampak memipih untuk mencapai perbandingan antara jejari kutub dan jejari equatorial 2/3. Kecepatan sudut maksimum pada model ini yaitu $0,7215G\bar{\rho}$, dengan $\bar{\rho}$ adalah kerapatan rata-rata. Pendekatan dengan model Roche biasanya lebih banyak digunakan karena lebih dekat kepada fakta yang ada.

II. TINJAUAN PUSTAKA

A. Kesetimbangan Hidrostatik pada Rotasi Benda Tegar

Jika ditinjau dari kerangka acuan yang berotasi bersama bintang, persamaan Navier-Stokes berbentuk

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\nabla^2\mathbf{v}' - \Omega \times (\Omega \times r) - \frac{d\Omega}{dt} \times \mathbf{r} - 2\Omega \times \mathbf{v} \tag{1}$$

dengan ν viskositas, P tekanan, dan Ω kecepatan sudut. Jika sistem dianggap berada dalam kesetimbangan hidrostatis, dan viskositas diabaikan (dianggap sangat kecil), serta kecepatan sudut dianggap sama di semua tempat di bintang (rotasi benda tegar), maka akan didapatkan persamaan,

$$0 = -\nabla\Phi - \frac{1}{\rho}\nabla P - \Omega \times (\Omega \times r') - 2\Omega \times v' \tag{2}$$

dengan $-\nabla\Phi$ percepatan gravitasi. Jika V_s didefinisikan sebagai potensial sentrifugal, dengan

$$V = -\frac{1}{2}\Omega^2\varpi^2 \tag{3}$$

dengan $\varpi = r\sin\theta$ jarak titik yang ditinjau dari sumbu rotasi maka didapat persamaan

$$\frac{1}{\rho}\nabla P = -\nabla\Psi = \mathbf{g}_{ef} \tag{4}$$

dengan

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta) &= \Phi(r) + V(r, \theta) \\ &= -\frac{GM_r}{r} - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \sin^2\theta \end{aligned} \tag{5}$$

adalah potensial efektif yang memenuhi persamaan Poisson $\nabla^2\Psi = 4\pi G\rho - 2\Omega^2$, dengan M_r massa bagian bintang yang berada di dalam bola berjari r yang berpusat di pusat bintang. Karena berlakunya Pers.(4), bintang dikatakan dalam keadaan Barotropik [2], yakni, daerah dengan nilai potensial yang sama (ekipotensial) memiliki tekanan yang sama, $P = P(\Psi)$.

*E-MAIL: iwanphysics@gmail.com

Permukaan bintang adalah daerah ekipotensial, yakni $\Psi = \text{tetapan}$. Andaikan kita tinjau sebuah bintang dengan massa total M dan $R(\theta)$ jejari bintang itu pada kolatitud θ . Karena gaya sentrifugal di daerah kutub bernilai nol, maka potensial pada kutub bintang itu adalah $-GM/R_p$, dengan R_p jejari kutub bintang. Oleh karenanya, nilai potensial di berbagai tempat di permukaan bintang itu adalah

$$\frac{GM}{R_p} = -\frac{GM}{R(\theta)} - \frac{1}{2}\Omega^2 R(\theta)^2 \sin^2\theta \quad (6)$$

Jika \mathbf{e}_r dan \mathbf{e}_θ merupakan vektor satuan dalam arah radial dan arah bujur, maka vektor percepatan gravitasi efektif pada permukaan bintang dari Pers.(5) dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{g}_{ef} = \left[-\frac{GM}{R(\theta)^2} + \Omega^2 R(\theta) \sin^2\theta \right] \mathbf{e}_r + \left[\Omega^2 R(\theta) \sin\theta \cos\theta \right] \mathbf{e}_\theta \quad (7)$$

B. Teorema von Zeipel dan Faktor Eddington

Teorema von Zeipel menyatakan hubungan antara fluks radiasi pada kolatitud θ di permukaan bintang yang berotasi dengan percepatan gravitasi efektif lokal [3]. Jika kita tinjau bintang yang berotasi seperti rotasi benda tegar, fluks radiasi dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{F}(\Omega, \theta) = -\chi \nabla T(\Omega, \theta) \quad (8)$$

dengan

$$\chi = \frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \quad (9)$$

Karena bintang berada dalam keadaan barotropik, maka

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\Omega, \theta) &= -\frac{dT}{dP} \nabla P(\Omega, \theta) \\ &= -\rho\chi \frac{dT}{dP} \mathbf{g}_{ef} \end{aligned} \quad (10)$$

Dengan demikian, dari hubungan antara luminositas bintang dan fluks radiasi, didapatkan

$$\mathbf{F}(\Omega, \theta) = -\frac{L}{4\pi GM_*} \mathbf{g}_{ef}(\Omega, \theta) \quad (11)$$

dengan

$$M_* = M \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G \rho_m} \right) \quad (12)$$

dan ρ_m rapat massa rata-rata bahan pada permukaan bintang itu.

Pada bintang yang berotasi, percepatan gravitasi total bintang merupakan penjumlahan beberapa percepatan : percepatan gravitasi murni, percepatan sentrifugal, dan percepatan oleh tekanan radiasi [3]. Hal ini dinyatakan dalam persamaan berikut

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{tot} &= \mathbf{g}_{ef} + \mathbf{g}_{rad} \\ &= \mathbf{g}_{gr} + \mathbf{g}_{rot} + \mathbf{g}_{rad} \end{aligned} \quad (13)$$

dengan \mathbf{g}_{rad} diberikan oleh

$$\mathbf{g}_{rad} = \frac{1}{\rho} \nabla P_{rad} = \frac{\kappa(\theta) \mathbf{F}}{c} \quad (14)$$

Faktor $\kappa(\theta)$ adalah kekedapan bahan pada kolatitud θ . Dengan memanfaatkan Pers.(11) dan (13), persamaan berikut didapatkan

$$\mathbf{g}_{tot} = \mathbf{g}_{ef} \left[1 - \frac{\kappa(\theta)L(P)}{4\pi cGM_*} \right] \quad (15)$$

Pada persamaan ini efek rotasi muncul pada \mathbf{g}_{ef} dan pada ungkapan di dalam kurung. Jika kita tinjau batas fluks secara lokal, yaitu keadaan dengan $\mathbf{g}_{tot} = 0$ [3], maka $\mathbf{g}_{rad} = \mathbf{g}_{ef}$. Batas fluks, oleh karena itu, diberikan oleh

$$\mathbf{F}_{lim}(\theta) = -\frac{c}{\kappa(\theta)} \mathbf{g}_{ef}(\theta) \quad (16)$$

Dari persamaan ini, jika faktor Eddington lokal $\Gamma_\gamma(\theta)$ didefinisikan sebagai nisbah (rasio) antara besarnya fluks sebenarnya dengan besarnya fluks batas lokal, maka didapatkan

$$\Gamma_\Omega(\theta) = \frac{\kappa(\theta)L(P)}{4\pi cGM \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G \rho_m} \right)} \quad (17)$$

Jika tidak bintang tidak mengalami rotasi (yakni jika Ω bernilai 0), maka $\Gamma_\Omega(\theta)$ akan sama dengan faktor Eddington Global Γ . Pers. (15), selanjutnya, dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{g}_{tot} = \mathbf{g}_{ef} [1 - \Gamma_\gamma(\theta)] \quad (18)$$

Persamaan ini mengungkapkan bahwa pada bintang yang berotasi, percepatan gravitasi total dipengaruhi oleh percepatan gravitasi efektif \mathbf{g}_{ef} (yang melibatkan ungkapan tentang kecepatan rotasi bintang) dan oleh luminositas bintang.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Keadaan Ambang (kritis) Pertama

Melalui ungkapan Pers. (18), keadaan ambang (*critical state*) dapat diperkirakan. Pada keadaan kritis ini percepatan gravitasi total lenyap sehingga tidak ada lagi percepatan atau gaya yang mengimbangi tekanan termal dari dalam bintang. Akibatnya, bahan-bahan bintang akan lari (buyar). Hal ini tentu saja mengakibatkan Pers. (18) akan mempunyai dua akar, yaitu $\mathbf{g}_{ef} = 0$ atau $\Gamma_\Omega(\theta) = 1$. Keadaan ini mengakibatkan adanya batas (limit) tertentu pada kecepatan rotasi bintang, selain bergantung pada beberapa parameter lain seperti massa bintang dan jejari bintang. Keadaan $\mathbf{g}_{tot} = 0$ juga akan memberikan adanya batas pada luminositas bintang sebagaimana dijelaskan di atas, yang disebut sebagai

Batas Eddington [5]. Keadaan ambang $\mathbf{g}_{ef} = 0$ akan dinamakan keadaan ambang pertama, sedangkan keadaan pada $\Gamma_{\Omega}(\theta) = 1$, disebut keadaan ambang kedua.

Keadaan ambang $\mathbf{g}_{tot} = 0$ menurut Pers.(7) diperoleh hanya pada wilayah katulistiwa ($\theta = \pi/2$). Keadaan ini memberikan ungkapan

$$\Omega_{krit}^2 = \frac{GM}{R_{e,krit}^3} \quad (19)$$

dengan $R_{e,krit}$ jeari-jari bintang di katulistiwa ketika keadaan kritis itu. Jika faktor f didefinisikan sebagai nisbah

$$f = \frac{R_e}{R_p} \quad (20)$$

antara jari-jari katulistiwa dan jari-jari kutub untuk sembarang kecepatan sudut, maka secara umum didapat

$$\frac{\Omega}{\Omega_{krit}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \left(\frac{R_{p,krit}}{R_p}\right)^{3/2} \left(\frac{2(f-1)}{f^3}\right)^{1/2} \quad (21)$$

Dengan pendekatan $R_{p,krit} = R_p$, yakni tidak ada perubahan pada jari-jari kutub, didapat

$$\frac{\Omega}{\Omega_{krit}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \left(\frac{2(f-1)}{f^3}\right)^{1/2} \quad (22)$$

Dari persamaan terakhir ini tampak bahwa $f = 3/2$ pada saat $\Omega = \Omega_{krit}$.

Jika v kecepatan singgung di katulistiwa, maka

$$\frac{v}{v_{krit}} = \left(\frac{\Omega}{\Omega_{krit}} 2(f-1)\right)^{1/3} \quad (23)$$

B. Geometri Bintang pada Berbagai Nilai Kecepatan Sudut

Kita tinjau kembali persamaan permukaan bintang sebagai daerah equipotensial, yakni Pers.(6). Persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai

$$R(\theta)^3 - \frac{2GM}{\Omega^2 R_p \sin^2 \theta} R(\theta) + \frac{2GM}{\Omega^2 \sin^2 \theta} = 0 \quad (24)$$

Persamaan ini memperlihatkan bahwa jeari bintang yang berotasi, sebagai fungsi sudut kolatitud, memenuhi persamaan polinom pangkat tiga yang bergantung kepada berbagai parameter: tetapan gravitasi (G), massa bintang (M), jeari polar (R_p), serta parameter kecepatan rotasi bintang itu sendiri (Ω). Jika jeari bintang ($R(\theta)$) dievaluasi pada semua sudut kolatitud maka akan didapatkan bentuk penampang bintang yang berotasi.

Memfaatkan beberapa data yang menyebutkan tentang parameter-parameter di atas, penampang membujur sebuah

TABEL I: Parameter bintang berotasi dengan massa 1 M [6]

$10^4 \Omega$	0	1,0	3,0	4,0	4,6	4,6254
α	0,000	0,020	0,205	0,451	0,903	1,0018
R_e/R_p	1,000	1,010	1,108	1,237	1,470	1,5198
$V_e k/s$	0	64	201	288	381	395
L/L_{\odot}	0,712	0,705	0,650	0,599	0,561	0,5595
R_e/R_{\odot}	0,914	0,919	0,964	1,035	1,189	1,2261
R_p/R_{\odot}	0,914	0,909	0,871	0,837	0,809	0,8067

bintang dengan kecepatan rotasi tertentu akan dapat digambarkan dengan terlebih dahulu menyelesaikan persamaan pangkat tiga untuk jeari bintang, Pers.(24). Pers.(24) dapat ditulis dalam bentuk

$$R(\theta)^3 - AR(\theta) + B = 0 \quad (25)$$

dengan

$$A = -\frac{2GM}{\Omega^2 R_p \sin^2 \theta}$$

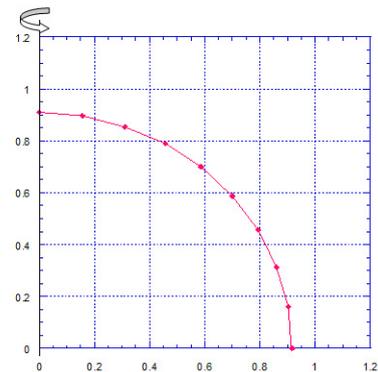
dan .

$$B = \frac{2GM}{\Omega^2 \sin^2 \theta}$$

Persamaan ini merupakan persamaan polinom pangkat tiga dengan parameter yang lebih sederhana, yang jika diselesaikan dengan metode *Newton-Raphson* dan dengan menggunakan data pada Tabel I, akan didapatkan jeari bintang $R(\theta)$ pada kolatitud θ . Perhitungan dengan cara itu menghasilkan Tabel II, dengan

$$G = 3,8 \times 10^{-7} \frac{R^3}{Ms^2}$$

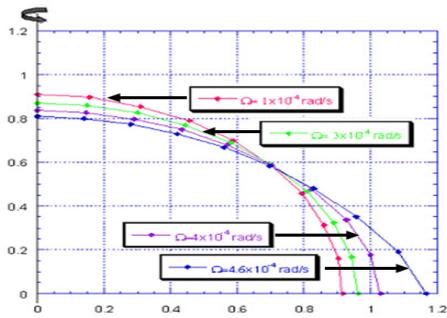
Dari Tabel II diperoleh tampang bujur bintang tersebut pada kuadran I pada koordinat kartesian, sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 1. Hasil perhitungan untuk bintang bermassa 1 M dalam berbagai kecepatan sudut rotasi diberikan oleh Gambar 2. Untuk Bintang 1 M dengan kecepatan sudut rotasi $\Omega = 4,6 \times 10^{-4}$ rad/s didapatkan bentuk penampang bujur yang melancip sepanjang



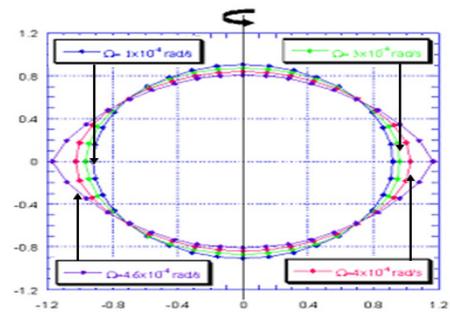
Gambar 1: Tampang bujur bintang berotasi 1 M dengan $\Omega = 10^{-4}$ rad/s.

TABEL II: Jejeri bintang 1 M dengan $\Omega 10^{-4}$ rad/s

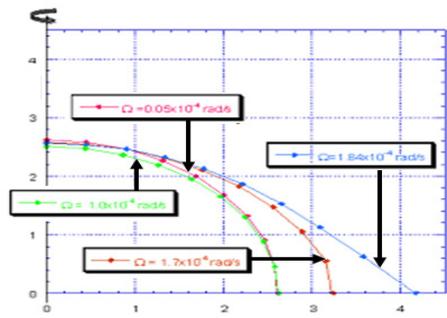
Ω^2	R_p	θ	$\sin^2\theta$	A	B	R	X	Y
1,00E-08	0,909	10	0,03014	2774,2798	2521,8294	0,9092	0,1578	0,8954
1,00E-08	0,909	20	0,11696	714,8213	649,7726	0,91	0,3112	0,8551
1,00E-08	0,909	30	0,25	334,4334	304,0000	0,9112	0,4556	0,7891
1,00E-08	0,909	40	0,41317	202,3602	183,9454	0,9127	0,5867	0,6991
1,00E-08	0,909	50	0,5867	142,4926	129,5257	0,9143	0,7004	0,5870
1,00E-08	0,909	60	0,74996	111,4844	101,3393	0,9158	0,7931	0,4579
1,00E-08	0,909	70	0,88302	94,6844	86,0682	0,9171	0,8618	0,3136
1,00E-08	0,909	80	0,96983	86,2092	78,3642	0,9179	0,9039	0,1593
1,00E-08	0,909	90	1	83,6084	76,0000	0,9182	0,9182	0,0000



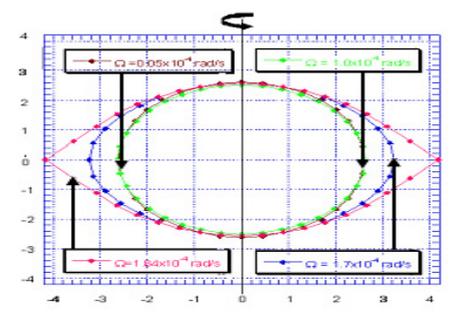
(a). 1 M



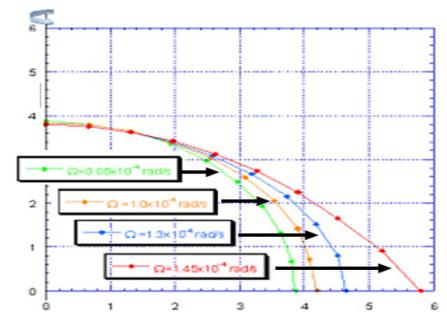
(a). 1 M



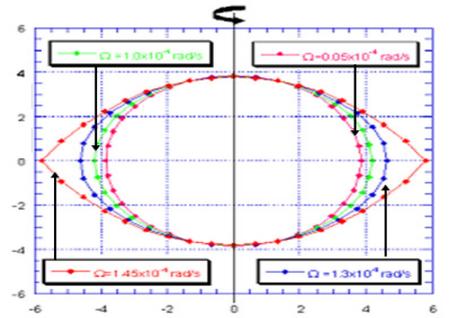
(b). 5 M



(b). 5 M



(c). 10 M



(c). 10 M

Gambar 2: Penampang bintang untuk beberapa nilai Ω

Gambar 3: Penampang bintang untuk beberapa nilai Ω

lingkar katulistiwa, kecepatan rotasi ini merupakan kecepatan yang mendekati kecepatan sudut kritis. Terlihat bahwa peningkatan kecepatan sudut rotasi akan menyebabkan terjadinya perubahan penampang bintang, sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 2.

Jika digambarkan secara keseluruhan, dengan prinsip kesetangkupan antar kuadran didapatkan Gambar 3. Dari beberapa gambar diatas terlihat bahwa, meningkatnya kecepatan rotasi akan merubah kesetimbangan bintang, yang ditandai dengan penurunan jejeri polar dan meningkatnya jejeri katulis-

tiwa. Pada Gambar 2, didapatkan bentuk penampang bujur bintang yang semakin melancip di katulistiwa karena seiring peningkatan kecepatan sudut rotasi. Penampang bintang yang paling melancip pada ujung-ujungnya ini merupakan penampang bintang dengan kecepatan rotasi yang sudah mencapai kecepatan kritis, ini dapat dibuktikan dengan nilai perbandingan antara jejari equatorial dan jejari polar yang telah mencapai $3/2$.

C. Geometri Bintang Pada Kecepatan Sudut Ambang

Meningkatnya kecepatan rotasi akan memengaruhi keseimbangan bintang. Jika kecepatan rotasi mencapai nilai ambang, maka jejari bintang dikatakan juga pada keadaan ambang. Persamaan jejari bintang pada kecepatan ambang dapat dituliskan menjadi

$$R_k(\theta)^3 - \frac{2GM}{\Omega_k^2 R_{p,k} \sin^2 \theta} R_k(\theta) + \frac{2GM}{\Omega_k^2 \sin^2 \theta} = 0 \quad (26)$$

dengan $R_k(\theta)$ jejari bintang pada keadaan kritis, Ω_k kecepatan sudut bintang pada keadaan ambang, serta $R_{p,k}$ jejari polar pada keadaan ambang. Jika kita gunakan ungkapan pada Pers.(19), maka Pers.(25), dapat dituliskan menjadi

$$R_k(\theta)^3 - \frac{27R_{p,k}^2}{4\sin^2 \theta} R_k(\theta) + \frac{27R_{p,k}^3}{4\sin^2 \theta} = 0 \quad (27)$$

Persamaan ini diselesaikan dengan metode yang sama dengan yang sebelumnya, dengan terlebih dahulu menentukan nilai $R_{p,k}$. Ungkapan untuk $R_{p,k}$ didapatkan dari Pers.(19) dan bantuan data-data yang diperoleh dari [4]. Hasil-hasil perhitungan untuk beberapa variasi massa bintang, pada kuadran I koordinat kartesian seperti pada Gambar 4. Jika digambarkan pada semua kuadran, didapatkan Gambar 5.

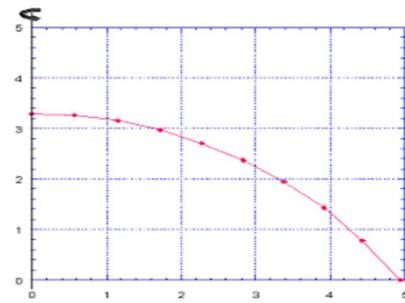
Dari beberapa gambar terlihat bahwa pada keadaan kritis, dengan kecepatan rotasi bintang yang juga berada pada kecepatan ambang, bentuk penampang bintang akan memipih, dengan ujung-ujung pada daerah khatulistiwa berbentuk lancip. Keadaan seperti ini disebabkan karena pada keadaan kritis. Di daerah katulistiwa gravitasi efektif yang bernilai nol, sehingga material dalam bintang yang sebelumnya berada dalam kesetimbangan hidrostatis (tekanan hidrostatis diimbangi oleh gravitasi), akan menuju keluar, karena tidak ada lagi gaya gravitasi yang menahannya.

D. Keadaan Ambang Kedua

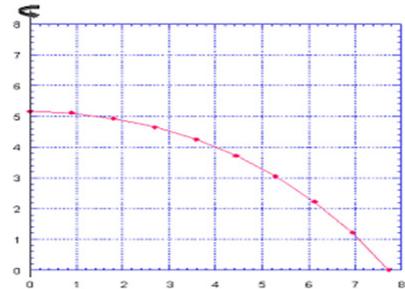
Keadaan Ambang kedua didapatkan ketika nisbah Eddington local, $\Gamma_{\Omega(\theta)}$, pada Pers.(18) bernilai 1. Sehingga Pers.(17) dapat dituliskan menjadi

$$\frac{\kappa(\theta)L(P)}{4\pi cGM} = 1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_m} \quad (28)$$

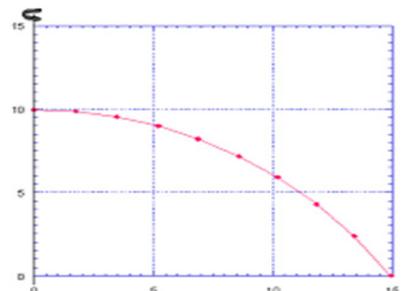
Melalui persamaan ini, dapat ditunjukkan bahwa luminositas pada bintang yang berotasi bergantung pada suku kedua ruas kanan Pers.(28), sehingga kecepatan rotasi bintang



(a). 9 M, $\Omega_k = 1,684.10^{-4}$ rad/s



(b). 20 M, $\Omega_k = 1,28.10^{-4}$ rad/s



(c). 60 M, $\Omega_k = 8,26.10^{-5}$ rad/s

Gambar 4: Penampang bintang untuk beberapa nilai Ω

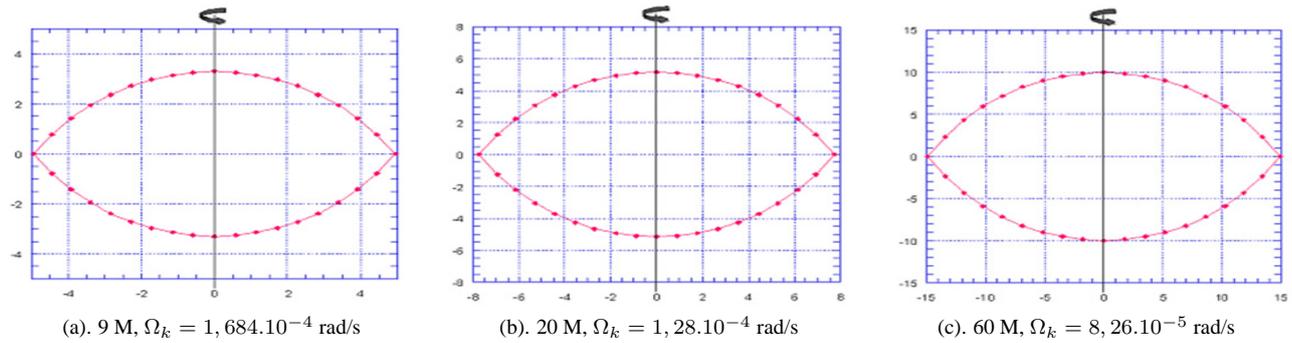
memenuhi

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_m} < 1 \quad (29)$$

Dengan menggunakan ungkapan $\rho_m = M/V$, dapat ditunjukkan bahwa

$$\Omega^2 < \frac{2\pi GM}{V} \quad (30)$$

Pers.(30) menunjukkan bahwa, untuk menjamin keberlangsungan luminositas pada bintang yang berotasi, maka kecepatan rotasi bintang tersebut harus lebih kecil dari hasil kali antara besaran 2π dengan tetapan gravitasi umum G dan kerapatan rata-rata permukaan bintang yang ditinjau. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa kecepatan rotasi bintang juga memengaruhi luminositas atau kecerlangan bintang, nilai kecepatan rotasi ini dibatasi oleh suku kedua ruas kanan Pers.(29). Inilah yang disebut sebagai keadaan kritis kedua.



Gambar 5: Penampang bintang untuk beberapa nilai Ω

IV. SIMPULAN

Kecepatan sudut rotasi bintang berpengaruh besar pada bentuk tampang bujur bintang itu. Terdapat dua macam ambang bagi kecepatan sudut rotasi bintang. Tampang bujur bintang pada kecepatan ambang pertama sangat khas. Jika kecepatan sudut rotasi bintang melampaui kecepatan ambang

pertama, maka kesetimbangan hidrostatis pada bintang akan dilanggar, yakni tidak ada lagi kesetimbangan hidrostatis. Keadaan ambang kedua dicapai pada saat kecepatan rotasi bintang sebanding dengan $2 GM/V$. Jika kecepatan kritis pada keadaan kritis kedua dilampaui, maka bintang akan "padam", yakni luminositasnya nol.

[1] Maeder, A., *Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars* (Springer Verlag Berlin Heidelberg, Germany. Pp. 22-80, 2009).

[2] Ekstrom, S, Meynet G, Maeder, A, Barblan F., *Evolution Towards the Critical Limit and the Origin of Be Stars*, arXiv:0711.1735v1 (2008).

[3] Maeder, A, Meynet, G., *The Eddington and Ω -Limits, the rotational mass loss for OB and LBV stars*, *Astronomy & Astrophysics*, **361**, 159-166 (2000).

[4] Meynet, G, Maeder, A., *The Computational Method and Inhibiting Effect of the γ -Gradient*, *Astronomy & Astrophysics*, **321**, 465-476 (1997).

[5] Meynet, G., *Physics of Rotation in Stellar Models*, arXiv:0801.2944v1 (2008).

[6] Roxburgh, I.W., *2-Dimensional Models of Rapidly Rotating Stars*, *Uniformly Rotating Zero Age Main Sequence Stars*. *Astronomy & Astrophysics*, **428**, 171-179 (2004).